4°/ Montrons que $\forall n \in \mathbf{N},\ |W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|$

• pour $n = 0$: $|W_0 - V_0| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{0} |W_0 - V_0|$

• Supposons que $|W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|$ et montrons que

$|W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n+2} |W_0 - V_0|$

$|W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2} |W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2} \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|$

d'où $|W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n+2} |W_0 - V_0|$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N},\ |W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|$.

b) On a : $-\frac{1}{3} \leq V_n \leq 0$

Etudions le sens des variations de la suite (V_n).

On a : $V_0 = U_0 = 0$, $V_1 = U_2 = f(U_1) = f \circ f(U_0) = f(\frac{1}{3}) = \frac{-27}{98}$.

On a : $V_0 > V_1$

Supposons que pour un entier donné n, $V_n > V_{n+1}$ et montrons que $V_{n+1} > V_{n+2}$.

On a : $V_n > V_{n+1}$ et f est strictement décroissante sur $[-\frac{1}{3}, 0]$ donc $f(V_n) < f(V_{n+1})$.

Or $f(V_n) = f(U_{2n}) = U_{2n+1}$